PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDA DENGAN MENGGUNAKAN MODIFIKASI METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

oleh :

HENDRI PANJAITAN
10654004476

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDA DENGAN MENGGUNAKAN MODIFIKASI METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

<u>HENDRI PANJAIATAN</u>
10654004476

Tanggal sidang : 26 Januari 2012
Periode Wisuda : ... Februari 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl.Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial tunda $y^n(x) = f(x, y(x), y(g(x))),$ untuk $n = 1$, 2 dan 3 dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian. Modifikasi metode dekomposisi Adomian merupakan metode semi analitik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Berdasarkan hasil kajian diperoleh bahwa secara umum modifikasi metode dekomposisi Adomian dapat menghampiri penyelesaian eksak persamaan diferensial tunda dan akurasi hampiran semakin baik jika melibatkan banyak suku-suku deret.

Kata kunci : Modifikasi metode dekomposisi Adomian, persamaan diferensial tunda, metode semi analitik.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial disebut juga dengan (equation differentialitis) yang dikenalkan oleh Leibniz pada tahun 1676.

Persamaan diferensial sering muncul dalam model matematika yang mencoba manggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesis-hipotesis yang dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan melalui model matematika. Sebagai contoh turunan-turunan dalam fisika muncul sebagai kecepatan dan percepatan, dalam geometri sebagai kemiringan (gradien), dalam bidang biologi sebagai kecepatan pertumbuhan, dan dalam keuangan sabagai kecepatan pertambahan investasi.

Persamaan diferensial dibagi menjadi tiga kelompok berdasarkan turunan fungsi terhadap variabel bebas yaitu persamaan diferensial tunda, persamaan diferensal parsial dan persamaan diferensial biasa. Disini penulis hanya membahas persamaan diferensial tunda karena secara analitik persamaan diferensial tunda ini sangat sulit untuk diselesaikan. Berbagai metode semi analitik melalui pendakatan deret yang telah diusulkan untuk menyelesaikan persamaan diferensia tunda diantaranya Fudziah (2002) menyelesaikan persamaan diferensial tunda dengan menggunakan Metode Runge-Kutta, Evans (2004) menyelesaikan persamaan diferensial tunda dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, Taiwo (2010) juga menyelesaikan persamaan diferensial tunda menggunakan metode dekomposisi Adomian.

Berdasarkan hasil perhitungan, metode ini telah mampu menyelesaikan persamaan diferensial tunda linier maupun nonlinier yang hampiran suku-suku terhadap penyelesaiaan eksak semakin membaik dan galat yang dihasilkan semakin kecil.

Hal inilah yang membuat penulis tertarik untuk meneliti modifikasi metode dekomposisi Adomian dalam menyelesaikan persamaan diferensil tunda. sehingga penulis memberikan judul tugas akhir ini "**Penyelesaiaan Persamaan Diferensial Tunda dengan Menggunakan Modifikasi Metode Dekomposisi Adomian**"

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah menentukan penyelesaian persamaan diferensial tunda dengan persamaan $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y(g(x))),$ untuk $n = 1,\ 2$ dan 3 dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian.

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini penulis hanya membatasi pada persamaan diferensial tunda linier dan nonlinier orde satu, dua dan tiga dengan persamaan umum $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y(g(x))),$ untuk $n = 1,\ 2$ dan 3 dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menyelesaikan persamaan diferensial tunda dengan persamaan $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y(g(x))),$ untuk $n = 1,\ 2$ dan 3 dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini memjelaskan tentang landasan teori yang digunakan, seperti persamaan diferensial, persamaan diferensial tunda, metode dekomposisi Adomian dan modifikasi metode dekomposisi Adomian.

Bab III Metodologi

Bab ini berisikan studi literatur yang digunakan penulis dan berisikan langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan tugas akhir ini.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan tentang modifikasi metode dekompsisi Adomian yang digunakan untuk menyelesaikan pesamaan diferensial tunda dengan persamaan umum $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y(g(x))),$ untuk $n = 1,\ 2$ dan 3 untuk persamaan linier dan nonlinier.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung fungsi dan bentuk- bentuk turunan.

Berdasarkan bentuk diferensial yang dikandungnya, persamaan diferensial dapat dikelompokkan sebagai berikut:

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Persamaan diferensial biasa yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan satu atau lebih turunan-turunan dari sebuah fungsi dengan satu variabel tak gayut (variabel yang diturunkan hanya satu).

Definisi 2.1 (Widiyati, 1988) persamaan diferensial biasa orde-n adalah suatu persamaan yang mempunyai bentuk umum, $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n-1)})$, dengan $y, y', \dots y^{(n)}$ semua dibentuk oleh nilai x.

2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan-persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan diferensial parsial haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas.

Definisi 2.2 (**Ioannis, 2004)** Andaikan $u = u(x_1, \dots x_n)$ merupakan fungsi dari variabel bebas untuk $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Persamaan diferensial parsial adalah suatu persaman yang terdiri dari variabel bebas $x_1, \dots, x_n$, variabel terikat atau selain dari fungsi u dan turunan persial sampai beberapa orde. Dapat dilihat dalam bentuk

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_i}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots) = 0$$

dengan F adalah fungsi yang diberikan dan $u_{x_j} = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, u_{x_i,x_j} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, \ldots, n$ merupakan turunan parsial terhadap x.

2.1.3 Persamaan Diferensial Tunda

Persamaan diferensial tunda adalah suatu persamaan dengan derivatif tergantung pada nilai-nilai dari solusi dengan nilai sekarang dan nilai sebelumnya pada variabel independen. Bentuk umum persamaan diferensial tunda $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \; y(g(x))),$ dengan $y(x) = \text{¤}(x)$, terhadap variabel bebas x

Persamaan diferensial tunda memiliki banyak pemecahan salah satunya dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, dalam pembahasan ini persamaan diferensial tunda akan diselesaikan dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian untuk memecahkan persamaan tunda linier dan nonlinier. Bentuk umum persamaan diferensial tunda berikut:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \; y(g(x))), \tag{2.1}$$

Fungsi $y(x)$, mewakili suatu kuantitas fisika yang berkembang dari waktu ke waktu. Turunan $y'(x)$ tergantung pada fungsi persamaan diferensial tunda, $y(x), \text{¤}(x)$ yang merupakan fungsi awal persamaan diferensial tunda.

2.4 Klasifikasi Persamaan Diferensial Tunda

Persamaan diferensial tunda dibagi ke dalam beberapa kelompok berdasarkan kriteria sebagai berikut:

a. Orde

Suatu persamaan diferensial tunda orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk .

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \; y(g(x))), \tag{2.2}$$

Pangkat n menunjukkan turunan terhadap variabal bebas x dengan $y(0)$ merupakan nilai awal persamaan yang telah ditetapkan.

Orde suatu persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang memenuhi dalam persamaan, yang mana orde sama dengan tingkat, sedangkan derajat suatu persamaan diferensial adalah pangkat dari turunan yang tertinggi.

Contoh persamaan diferensial tunda orde dua linier:

$$y^{''}(x) = \frac{3}{4}y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) - x^2 + 2,$$

$$y(0) = 0, \qquad y^{'}(0) = 0 \tag{2.3}$$

Contoh persamaan diferensial tunda orde satu nonlinier

$$y^{'}(x) = 1 - 2y^2\left(\frac{x}{2}\right), \qquad y(0) = 0 \tag{2.4}$$

b. Linier dan Nonliniernya

Persamaan diferensial linier dapat ditentukan dengan melihat koefisien pada fungsi turunan, jika koefisiennya konstanta atau suatu fungsi lain maka persamaan itu disebut persamaan diferensial linier

Contoh persamaan diferensial linier.

$$y^{'}(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}y\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}y(x), \; y(0) = 1 \tag{2.5}$$

Persamaan diferensial tunda dikatakan nonlinier jika koefisien suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada pada persamaan tersebut.

Contoh persamaan diferensial nonlinier.

$$y^{'}(x) = 1 - 2y^2\left(\frac{x}{2}\right), \qquad y(0) = 0 \tag{2.6}$$

c. Homogen dan Nonhomogen

Menentukan homogen dan nonhomogennya suatu persamaan diferensial dapat dilihat dari fungsi persamaan diferensial tunda itu sendiri. Untuk menentukan homogen atau nonhomogennya suatu persamaan diferensial tunda jika bentuk umum dari persaman diferensial tunda sebagai berikut:

$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \; y(g(x)))$, yaitu apabila fungsi $y^{(n)}(x) = 0$ maka persamaan itu dikatakan homogen dan jika fungsi $y^{(n)}(x) \neq 0$ maka fungsi tersabut nonhomogen.

Contoh 2.1

1. $\left(y(x) - \frac{1}{2}y(x-2)\right)^{'} + y(x-1) + 3y(x-3) = 0$ persamaan diferensial homogen.
2. $y^{'}(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}y\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}y(x)$ persamaan diferensial nonhomogen.

2.5 Persamaan Difensial Tunda Orde Satu dan Dua

Persamaan diferensial tunda adalah suatu persamaan dengan derivatif tergantung pada nilai-nilai dari solusi nilai sekarang dan nilai sebelumnya pada variabel bebas.

Bentuk umum persamaan diferensial tunda dibarikan oleh $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \; y(g(x)))$, jika $n = 1$ maka persamaan diferensial yang di maksud adalah persamaan diferensial tunda orde satu dan jika $n = 2$ maka persamaan diferensial yang dimaksud adalah perasamaan diferensial tunda orde dua.

Contoh 2.2

Diberikan persamaan tunda berikut:

$$y^{'}(x) = 1 - 2y^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad y(0) = 0 \tag{2.7}$$

persamaan diferensial orde satu nonlinier.

Contoh 2.3

$y^{''}(x) = \frac{3}{4}y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) - x^2 + 2, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 0$ persamaan diferensial orde dua linier

2.6 Metode Dekomposisi Adomian

Metode dekomposisi Adomian adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier berdasarkan nilai awal dan hasil perhitungannya cukup efektif untuk menghampiri penyelesaian eksak. Berdasarkan prinsip-prinsip dasar metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang dapat di mulai dari persamaan umum $Fu = g(x)$ dengan Fu dipecah menjadi persamaan diferensial linier dan nonlinier. Komponen linier dapat ditulis sebagai $Lu + Ru$ dengan L merupakan operator diferensial tertinggi dan R merupakan operator diferensial linier sedangkan Nu mewakili istilah nonlinier. Untuk itu, persamaan dapat ditulis sebagai:

$$Lu + Ru + Nu = g(x)\,. \tag{2.9}$$

atau

$$Lu = g - Ru - Nu. \tag{2.10}$$

Oleh karena $L = \frac{d^n}{dx^n}$ merupakan operator diferensial tertinggi dalam persamaan diferensial maka dapat diasumsikan bahwa invers operator L^{-1} ada, dan merupakan integral sebanyak orde, yang ada pada L terhadap u dari 0 sampai u.

Jika diambil $n = 2$, maka $L = \frac{d^2}{dx^2}$ sehingga:

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)dxdx \tag{2.11}$$

dari persamaan (2.10) diperoleh:

$$u = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \tag{2.12}$$

Penyelesaian u pada persamaan (2.12) dapat dinyatakan sebagai penjumlahan deret tak terhingga:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ . \tag{2.13}$$

Untuk komponen nonlinier pada persamaan (2.12) dapat diasumsikan bahwa Nu adalah deret polinomial A_n yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \ , \tag{2.14}$$

dengan A_n diperoleh dengan menuliskan:

$$\text{³}(\text{ª}) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{ª}^n u_n \ , \tag{2.15}$$

sehingga:

$$N(\text{³}(\text{ª})) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{ª}^n A_n . \tag{2.16}$$

dan ª merupakan parameter untuk persamaan (2.15) dan (2.16), sehingga deret polinomial A_n dapat ditulis dalam bentuk:

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\text{ª}^n}\left[N\sum_{k=0}^{\infty} \text{ª}^k u_k \right]_{\text{ª}=0} , \ n \geq 0. \tag{2.17}$$

Selanjutnya deret polinomial Adomian A_n pada persamaan (2.17) dapat ditulis secara berurut sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_0 &= F(u_0) \\ A_1 &= u_1 F^{'}(u_0) \\ A_2 &= u_2 F^{'}(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} F^{''}(u_0) \\ A_3 &= u_3 F^{'}(u_0) + u_1 u_2 F^{''}(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} F^{'''}(u_0) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.18}$$

Sekarang subtitusikan persamaan (2.13) dan (2.14) ke persamaan (2.12), di peroleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = L^{-1}g + L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n . \tag{2.19}$$

Berdasarkan persamaan (2.20) didapatkan nilai u yang sesuai sehingga dapat di tulis:

$$\begin{aligned} u_0 &= L^{-1}g \\ u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 . \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{aligned} \tag{2.20}$$

Contoh 2.4

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial tunda nonlinier orde satu berikut:

$$y^{'}(x) = 1 - 2y^2\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2.21}$$

dengan kondisi awal $y(0) = 0$ dan solusi eksak $y(x) = \sin(x)$. (O.A Taiwo, 2010).

Penyelesaian :

Persamaan (2.21) dapat ditulis kedalam operator diferensial sebagai berikut:

$$Ly(x) = 1 - 2y^2\left(\frac{x}{2}\right), \text{ dengan } L = \frac{d}{dx} \tag{2.22}$$

Menerapkan L^{-1} di kedua ruas pada persamaan (2.22), sehingga diperoleh:

$$y(x) = L^{-1}(1) - 2L^{-1}\left\{y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\},$$

$$= x - 2L^{-1}\left\{y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\} \tag{2.23}$$

Berdasarkan persamaaan (2.23) integral dari metode dekomposisi Adomian dibagi menjadi dua bagian yaitu:

$$y_0 = x \tag{2.24}$$

dan

$$y_{n+1} = -2L^{-1}\left\{y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\} \text{ untuk } n = 0,...4 \tag{2.25}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai y_1, terlebih dahulu ditentukan nilai A_0 dengan cara mensubtitusikan persanaan (2.24) ke dalam persamaan (2.18) sebagai berikut:

$$A_0 = y_0^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{x^2}{4} \tag{2.26}$$

Berikutnya untuk mendapatkan y_1 subtitusikan persamaan (2.26) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$y_1 = -2\int_0^x A_0 dx$$

$$= -2\int_0^x \frac{x^2}{4} dx$$

$$= -\frac{x^3}{6} \qquad (2.27)$$

Selanjutnya untuk mencari A_1 Subtitusikan persamaan (2.24) dan (2.27) ke dalam persamaan (2.18) sebagai berikut:

$$A_1 = x\left(-\frac{1}{48}x^3\right)$$

$$= -\frac{1}{48}x^4 \qquad (2.28)$$

Selanjutnya untuk mendapatka nilai y_2 subsitusikan persamaan (2.28) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$y_2 = -2\int_0^x A_1 dx$$

$$= -2\int_0^x -\frac{1}{48}x^4 dx$$

$$= \frac{1}{120}x^5 \qquad (2.29)$$

Selanjutnya nilai A_2 dapat ditentukan dengan mensubtitusikan persamaan (2.24), (2.27) dan (2.29) ke dalam persamaan (2.18) sebagai berikut:

$$A_2 = \frac{1}{2304}x^6 + \frac{1}{3840}x^6$$

$$= \frac{1}{1440}x^6 \qquad (2.30)$$

Nilai y_3 dapat diperoleh dengan mensubtitusikan persamaan (2.30) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$y_3 = -2\int_0^x A_2 dx$$

$$= -2\int_0^x \frac{1}{1440}x^6 dx$$

$$= -\frac{1}{5040}x^7 \tag{2.31}$$

Selanjutnya tentukan nilai A_3 dengan mensubtitusikan persamaan (2.24), (2.27), (2.29) dan (2.31) ke dalam persamaan (2.18) sebagai berikut:

$$A_3 = -\frac{1}{92160}x^8 - \frac{1}{645120}x^8$$

$$= -\frac{1}{80640}x^8 \tag{2.32}$$

Selanjutnya nilai y_4 dapat ditentukan dengan mensubtitusikan persamaan (2.32) ke dalam persamaan (2.11)sebagai berikut:

$$y_4 = -2\int_0^x A_3 dx$$

$$= -2\int_0^x -\frac{1}{80640}x^8 dx$$

$$= \frac{1}{362880}x^9 \tag{2.33}$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (2.21) bergantung pada banyaknya suku-suku yang dicari.

$$y_0(x) = x$$

$$y_1(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

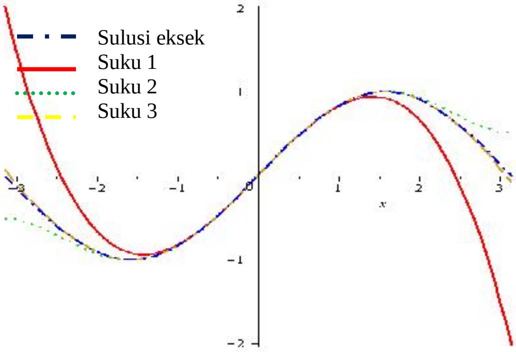
$$y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

$$y_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

$$y_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 \tag{2.34}$$

$$\vdots$$

Gambar (2.1) merupakan hampiran suku-suku pada persamaan (2.34) terhadap penyelasaian eksak pada interval $-® \le x \le ®$.

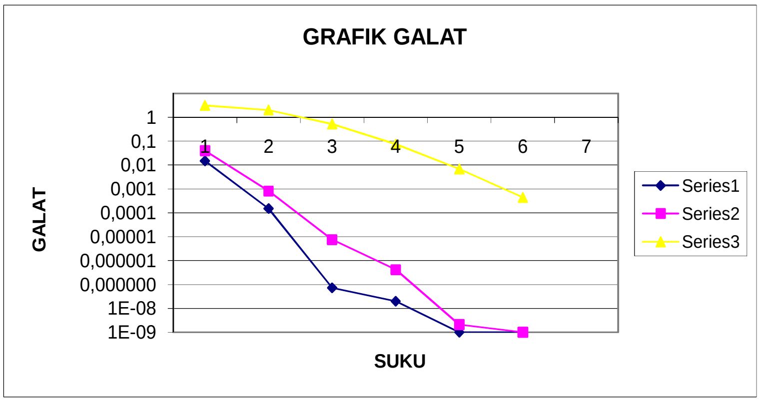


Pada gambar diatas terlihat bahwa semakin benyak suku yang digunakan untuk menghampiri nilai eksak maka galat yang diperoleh akan semakin kecil, dari ketiga suku yang digunakan, suku ke tiga adalah suku yang paling mendekati nilai eksak persamaan diferensial tunda.

Tabel 2.1 Galat Contoh (2.4) untuk $\frac{®}{7} \le x \le ®$

x	E_1	E_2	E_3	E_5	E_6	E_7
$®/7$	0.0149152114	0.0001510066	0.0000007257	0.000000002	0	0
$®/6$	0.0235987758	0.0003258204	0.0000021328	0.0000000079	0.0000000003	0.0000000003
$®/5$	0.0405332784	0.0008084238	0.0000076287	0.0000000419	0.00000000021	0
$®/4$	0.0782913825	0.0024541297	0.0000362649	0.0000003113	0.000000021	0.0000000003
$®/3$	0.1811721470	0.0102246227	0.0002698795	0.0000041326	0.0000000408	0.0000000008
®	3.141592654	2.026120129	0.524043913	0.0752206169	0.00692526980	0.00044516115

Berdasarkan Tabel (2.1) dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentik oleh suku ke tujuh lebih mendekati dibandingkan dengan kurva-kurva yang lainnya. Hal ini menunjukan semakin banyak iterasi yang digunakan akan mendekati kurva eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *galat* yang duhasilkan oleh beberapa suku dari tabel diatas dapat dilihat pada gambar 2.2 berikut:



Gambar 2.2 menunjukkan kecepatan metode dekomposisi Adomian menghampiri nilai eksak persamaan diferensial tunda pada persamaan (2.21) dengan $y(x) = \sin x$ pada interval $\frac{\text{®}}{7} \le x \le \text{®}$ untuk beberapa jumlah suku.

Contoh 2.5

Tentukan penyelesaiaan persamaan diferensial tunda linier orde dua sebagai berikut:

$$y''(x) = \frac{3}{4} y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) - x^2 + 2 \tag{2.35}$$

dengan kondisi awal $y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$ dan solusi eksak $y(x) = x^2$. (O.A Taiwo, 2010).

Penyelesaian :

Persamaan (2.35) dapat ditulis kedalam operator diferensial sebagai berikut:

$$Ly(x) = \frac{3}{4} y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) + \left(-x^2 + 2\right), \text{ dengan } L = \frac{d^2}{dx^2} \tag{2.36}$$

Menerapkan L^{-1} di kedua ruas pada persamaan (2.36), sehingga diperoleh:

$$y(x) = L^{-1}\left(\frac{3}{4} y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right)\right) + L^{-1}\left(-x^2 + 2\right)$$

$$y(x) = x^2 - \frac{x^4}{12} + L^{-1}\left(\frac{3}{4} y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{2.37}$$

Berdasarkan persamaaan (2.37) integral metode dekomposisi Adomian dibagi menjadi dua bagian yaitu:

$$y_0 = x^2 - \frac{x^4}{12} \tag{2.38}$$

dan

$$y_{n+1} = L^{-1}\frac{3}{4}y(x) + L^{-1}y\left(\frac{x}{2}\right)dxdx \tag{2.39}$$

Untuk mencari nilai y_1 subtitusikan persamaan (2.38) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$y_1 = \int_0^x\int_0^x\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{192}x^4\right)dxdx$$

$$= \frac{1}{12}x^4 - \frac{13}{5760}x^6 \tag{2.40}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai y_2 subtitusikan persamaan (2.40) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$y_2 = \int_0^x\int_0^x\left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{13}{7680}x^6 + \frac{1}{192}x^4 - \frac{13}{368640}x^6\right)dxdx$$

$$= \frac{13}{5760}x^6 - \frac{91}{2949120}x^8 \tag{2.41}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai y_3 subtitusikan persamaan (2.41) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$y_3 = \int_0^x\int_0^x \frac{13}{7680}x^6 - \frac{91}{3932160}x^8 + \frac{13}{368640}x^6 - \frac{91}{754974720}x^6dxdx$$

$$= \frac{91}{2949120}x^8 - \frac{17563}{67947724800}x^{10} \tag{2.42}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai y_4 subtitusikan persamaan (2.42) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$y_4 = \int_0^x\int_0^x\left(\frac{91}{3932160}x^8 - \frac{17563}{90596966400}x^{10}\right.$$

$$\frac{91}{754974720}x^9 - \frac{17563}{69578470195200}x^{10}\Bigg)dxdx$$

$$= \frac{17563}{67947724800}x^{10} - \frac{13505947}{9184358065766400}x^{12} \qquad (2.43)$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (2.35) bergantung pada suku-suku yang dicari sebagai berikut:

$$y_0(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^4$$

$$y_1(x) = x^2 - \frac{13}{5760}x^6$$

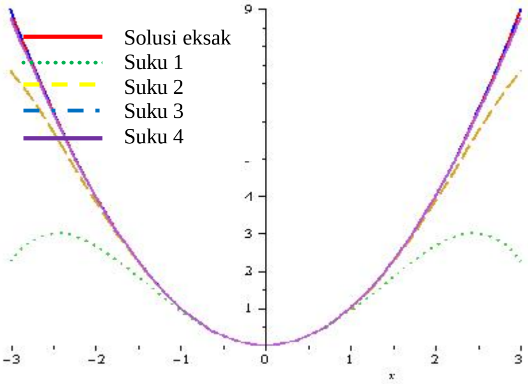
$$y_2(x) = x^2 - \frac{91}{2949120}x^8$$

$$y_3(x) = x^2 - \frac{17563}{67947724800}x^{10}$$

$$y_4 = x^2 - \frac{13505947}{9184358065766400}x^{10} \qquad (2.44)$$

$$\vdots$$

Gambar (2.3) merupakan hampiran suku-suku pada persamaan (2.44) terhadap penyelesaian eksak pada interval $-3 \le x \le 3$.

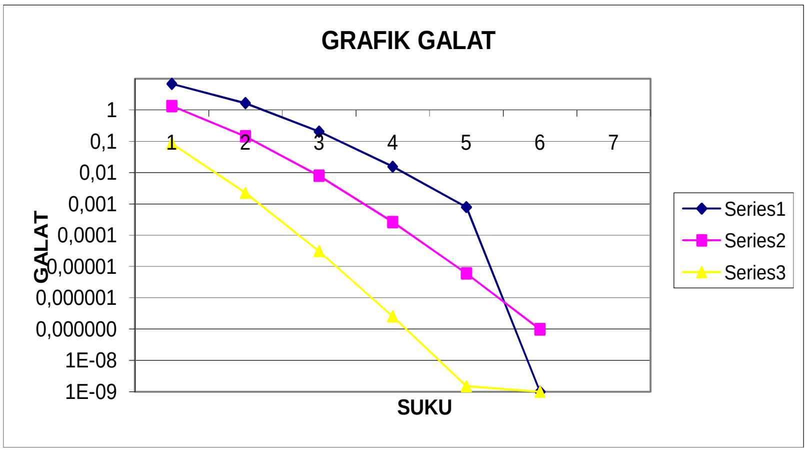


Pada gambar di atas terlihat bahwa semakin benyak suku yang digunakan untuk menghampiri nilai eksak maka galat yang diperoleh akan semakin kecil, dari ketiga suku yang digunakan, suku ke empat adalah suku yang paling mendekati nilai eksak persamaan diferensial tunda.

Tabel 2.2 Galat Contoh (2.5) untuk $-3 \le x \le 3$

x	E_1	E_2	E_3	E_5	E_6	E_7
-9	6.750000000	1.645312500	0.202450562	0.015262874	0.000781504	0.000028994
-4	1.333333333	0.144444444	0.007899306	0.000264682	0.000006023	0.000000099
-1	0.0833333333	0.0022569444	0.0000308567	0.0000002585	0.0000000015	0
1	0.0833333333	0.0022569444	0.0000308567	0.0000002585	0.0000000015	0
4	1.333333333	0.144444444	0.007899306	0.000264682	0.000006023	$9.9\ 10^{-8}$
9	6.750000000	1.645312500	0.202450562	0.015262874	0.000781504	0.000028994

Bardasarkan Tabel (2.2) dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentik oleh suku ke tujuh lebih mendekati dibandingkan dengan kurva-kurva yang lainnya. Hal ini menunjukan semakin banyak iterasi yang digunakan akan mendekati kurva eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *galat* yang duhasilkan oleh beberapa suku dari tabel diatas dapat dilihat pada gambar 2.4 berikut:



Gambar 2.4 menunjukkan kecepatan metode dekomposisi Adomian menghampiri nilai eksak persamaan diferensial tunda pada persamaan (2.35) dengan $y(x) = x^2$ pada interval $-9 \le x \le 9$ untuk beberapa jumlah suku.

Contoh 2.6

Tentukan penyelesaiaan persamaan diferensil tunda nonlinier orde tiga sebagai berikut:

$$y'''(x) = -1 + 2y^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.45)$$

dengan kondisi awal $y(0)=0,\ y'(0)=1$ dan $y''(0)=0$ solusi eksak $y(x)=\sin(x)$. (O.A Taiwo, 2010).

Penyelesaian :

Persamaan (2.45) dapat ditulis kedalam operator diferensial sebagai berikut:

$$Ly(x) = (-1) + 2\left(y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right), \text{ dengan } L = \frac{d^3}{dx^3} \quad (2.46)$$

Menerapkan L^{-1} di kedua ruas pada persamaan (2.46), sehingga diperoleh:

$$y(x) = L^{-1}(-1) + 2L^{-1}\left(y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$y(x) = x - \frac{x^3}{6} + 2L^{-1}\left(y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad (2.47)$$

Berdasarkan persamaaan (2.47) integral dari metode dekomposisi Adomian dibagi menjadi dua bagian yaitu:

$$y_0(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad (2.48)$$

dan

$$y_{n+1} = 2L^{-1}\left\{y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\} \quad n = 0,1,2,...n \quad (2.49)$$

Selanjutnya untuk mencari nilai y_1, terlebih dahulu ditentukan nilai A_0 dengan cara mensubtitusikan persanaan (2.48) ke dalam persamaan (2.18) sebagai berikut:

$$A_0(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{2304}x^6 \quad (2.50)$$

Berikutnya untuk mendapatkan y_1 subtitusikan persamaan (2.50) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$y_1(x) = 2\int_0^x\int_0^x\int_0^x A_0 dxdxdx$$

$$= \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{580608}x^9 \qquad (2.51)$$

Selanjutnya untuk mencari A_1 Subtitusikan persamaan (2.48) dan (2.51) ke dalam persamaan (2.18) sebagai berikut:

$$A_1(x) = \left(x - \frac{1}{24}x^3\right)\left(\frac{1}{3840}x^5 - \frac{1}{645120}x^7 + \frac{1}{297271296}x^9\right)$$

$$= \frac{1}{3840}x - \frac{1}{80640}x + \frac{101}{1486356480}x^{10} - \frac{1}{7134511104}x^{12} \qquad (2.52)$$

Berikutnya untuk mendapatkan y_2 subtitusikan persamaan (2.52) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$y_2(x) = 2\int_0^x\int_0^x\int_0^x A_1 dxdxdx$$

$$= \frac{1}{967680}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} - \frac{101}{1275293859840}x^{13} - \frac{1}{9738607656960}x^{15} \qquad (2.53)$$

Selanjutnya nilai A_2 dapat ditentukan dengan mensubtitusikan persamaan (2.48), (2.51) dan (2.53) ke dalam persamaan (2.18) sebagai berikut:

$$A_2(x) = \frac{1}{14745600}x^{10} - \frac{1}{1238630400}x^{12} + \frac{83}{19976631091200}x^{14} - \frac{1}{95887829237760}x^{16} + \frac{1}{88370223425519616}x^{18}$$

$$\left(x - \frac{1}{24}x^3\right)\left(\frac{1}{495452160}x^9 - \frac{1}{81749606400}x^{11} + \frac{101}{10447207299809280}x^{13} - \frac{1}{319114695703265280}x^{15}\right)$$

$$= \frac{173}{2477260800}x^{10} - \frac{197}{217998950400}x^{12} + \frac{341827}{73130451098664960}x^{14}$$

$$
-\frac{38033}{3510261652735918080}x^{16}
$$

$$
+\frac{263}{22976258090635100160}x^{18} \tag{2.54}
$$

Nilai y_3 dapat diperoleh dengan mensubtitusikan persamaan (2.54) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$
y_3(x) = 2\int_0^x\int_0^x\int_0^x A_2 dxdxdx
$$

$$
= \frac{173}{2125489766400}x^{13} - \frac{197}{297568567296000}x^{15}
$$

$$
+\frac{341827}{149186120241276518400}x^{17} - \frac{38033}{1020433062450331385856 0}x^{19}
$$

$$
+\frac{263}{916752697816340496384 00}x^{21} \tag{2.55}
$$

Selanjutnya tentukan nilai A_3 dengan mensubtitusikan persamaan (2.48), (2.53) dan (2.55) ke dalam persamaan (2.18) sebagai berikut:

$$
A_3(x) = \left(\frac{1}{1920}x^5 - \frac{1}{322560}x^7 + \frac{1}{148635648}x^9\right)
$$

$$
\left(\frac{1}{495452160}x^9 - \frac{1}{81749606400}x^{11} + \frac{101}{10447207299809280}x^{13}\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{319114695703265280}x^{15}\right)\left(x - \frac{1}{24}x^3\right)\left(\frac{173}{17412012166348800}x^{13}\right.
$$

$$
-\frac{197}{975072681315532800 0}x^{15} + \frac{341827}{1955412315226459581972480 0}x^{17}
$$

$$
-\frac{38033}{535000809445959341627670528 0}x^{19}
$$

$$
\left.+\frac{263}{1922569753730934104672698368 00}x^{21}\right)
$$

$$
= \frac{2053}{1934668018483200}x^{14} - \frac{4199}{321452532301824000}x^{16}
$$

$$
+\frac{259002797}{451248995821490672762880 0}x^{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2818531}{24586434257626807979212800}x^{20} \\
&+\frac{2698389173}{35952054394768467757379459481600}x^{21} \\
&+\frac{2698389173}{35952054394768467757379459481600}x^{22} \\
&-\frac{97543}{4614167408954241851214476083200}x^{24}
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Selanjutnya nilai y_4 dapat ditentukan dengan mensubtitusikan persamaan (2.56) ke dalam persamaan (2.11)sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
y_4(x) &= 2\int_0^x\int_0^x\int_0^x (A_3)\,dxdxdx \\
&= \frac{2053}{3946722757705728000}x^{17} - \frac{13}{2893072790716416000}x^{19} \\
&\quad+\frac{259002797}{18004834933277477843238912000}x^{21} \\
&\quad-\frac{2818531}{130627725210771230793557606400}x^{23} \\
&\quad+\frac{2698389173}{248069175323902427525918270423040000}x^{25} \\
&\quad-\frac{97543}{40489319013573472244407027630080000}x^{27}
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (2.45) bergantung pada banyaknya suku-suku yang dicari.

$$y_0(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

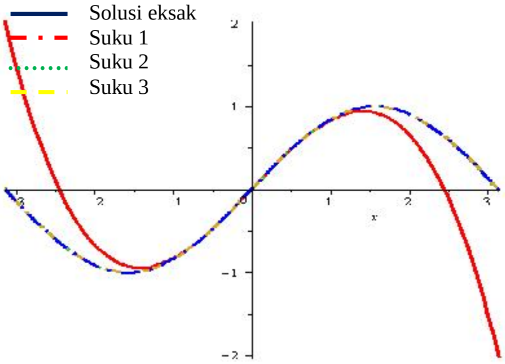
$$y_1(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$$

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} \\
&\quad+\frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_3(x) = x &- \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 \\
&- \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13} \\
&- \frac{1}{1307674368000}x^{15} + \frac{1}{355687428096000}x^{17} \\
&- \frac{1}{121645100408832000}x^{19} \\
&+ \frac{1}{51090942171709440000}x^{21} - \frac{1}{25852016738884976640000}x^{23} \\
&+ \frac{2746347638351}{4706107268797367484045378354602311680 0}x^{25} \\
&- \frac{830534153300099}{1569251468780482187554931412342140829696 0000}x^{27}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_4(x) = x &- \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} \\
&+ \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{1307674368000}x^{15} \\
&+ \frac{1}{355687428096000}x^{17} - \frac{1}{121645100408832000}x^{19} \\
&+ \frac{1}{51090942171709440000}x^{21} - \frac{1}{25852016738884976640000}x^{23} \\
&+ \frac{2746347638351}{47061072687973674840453783546023116800}x^{25} \\
&+ \frac{369706765787823899}{13048137652733455731656748101855419942022676480000}x^{29} \\
&- \frac{4608694387027667}{551580364411005174110944351578433661185504051200000}x^{31} \\
&+ \frac{17368542001}{14943600665584336315978666972827834969237749760000}x^{33} \\
&- \frac{830534153300099}{15692514687804821875549314123421408296960000}x^{27} \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

Gambar (2.5) merupakan hampiran suku-suku pada persamaan (2.58) terhadap penyelesaian eksak pada interval $-® \le x \le ®$

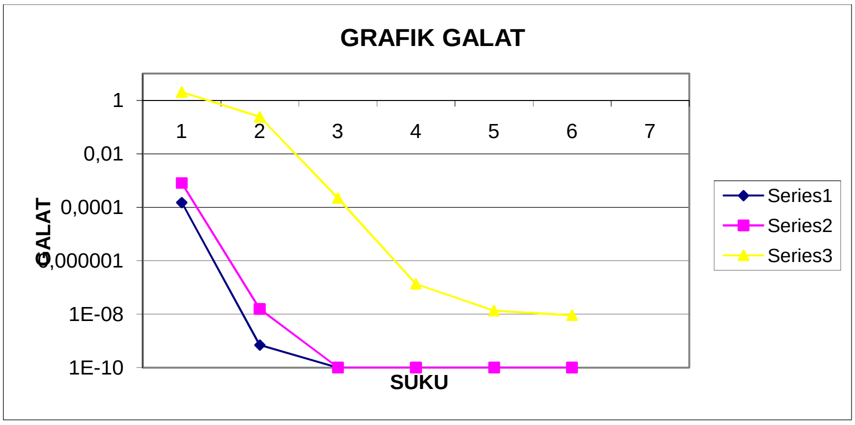


Pada gambar di atas terlihat bahwa semakin benyak suku yang digunakan untuk menghampiri nilai eksak maka galat yang diperoleh akan semakin kecil, dari ketiga suku yang digunakan, suku ke empat adalah suku yang paling mendekati nilai eksak persamaan diferensial tunda.

Tabal 2.3 Galat Contoh (2.6) untuk $\frac{®}{7} \le x \le ®$.

x	E_1	E_2	E_3	E_5	E_6	E_7
$®/7$	0.0001510066	0.0000000007	0	0	0	0
$®/6$	0.0003258204	0.0000000028	0.0000000003	0.0000000003	0.0000000003	0.0000000003
$®/5$	0.0008084238	0.0000000156	0	0	0	0
$®/4$	0.0024541297	0.0000001154	0.0000000003	0.0000000003	0.0000000003	0.0000000003
$®/3$	0.0102246227	0.0000015242	0.0000007	0.0000000005	0.0000000005	0.0000000005
®	2.026120129	0.02387943772	0.0002181401	0.0000001359	0.0000001359	0.00000000091

Bardasarkan Tabal (2.3) dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentik oleh suku ke tujuh lebih mendekati dibandingkan dengan kurva-kurva yang lainnya. Hal ini menunjukan semakin banyak iterasi yang digunakan akan mendekati kurva eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *galat* yang duhasilkan oleh beberapa suku dari tabel diatas dapat dilihat pada gambar 2.6 berikut:



Gambar 2.6 menunjukkan kecepatan metode dekomposisi Adomian menghampiri nilai eksak persamaan diferensial tunda pada persamaan (2.45) dengan $y(x) = \sin x$ pada interval $\frac{®}{7} \leq x \leq ®$ untuk beberapa jumlah suku.

2.7 Modifikasi Metode Dekomposisi Adomian

Pada dasarnya modifikasi metode dekomposisi Adomian hampir sama dengan metode dekomposisi adomian biasa, modifikasi dapat dilihat pada operator diferensial dan operator invers diferensial. Perhatikan persamaan umum $Fu = g(x)$ dengan Fu dipecah menjadi persamaan diferensial linier dan nonlinier. Komponen linier dapat ditulis sebagai $Lu + Ru$ dengan L merupakan operator diferensial tertinggi dan R merupakan operator diferensial linier sedangkan Nu mewakili istilah nonlinier. Untuk itu, persamaan dapat ditulis sebagai:

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{2.59}$$

atau

$$Lu = g - Ru - Nu. \tag{2.60}$$

Oleh karena $L = x^{-1} \frac{d^n}{dx^n} x$ merupakan operator diferensial tertinggi dalam persamaan diferensial maka dapat diasumsikan bahwa invers operator L^{-1} ada, dan merupakan integral sebanyak orde, yang ada pada L terhadap u dari 0 sampai u. Jika diambil $n = 2$, maka $L = x^{-1}\dfrac{d^2}{dx^2}x$ sehingga

$$L^{-1}(.) = x^{-1}\int_0^x\int_0^x x(.)dxdx. \tag{2.61}$$

dari persamaan (2.60) diperoleh:

$$u = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \tag{2.62}$$

penyelesaian u pada persamaan (2.62) dapat dinyatakan sebagai penjumlahan deret tak terhingga:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ . \tag{2.63}$$

Untuk komponen nonlinier pada persamaan (2.62) dapat diasumsikan bahwa Nu adalah deret polinomial A_n yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\ , \tag{2.64}$$

dengan A_n diperoleh dengan menuliskan

$$\text{³}(\text{ª}) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{ª}^n u_n\ , \tag{2.65}$$

sehingga:

$$N(\text{³}(\text{ª})) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{ª}^n A_n. \tag{2.66}$$

dan ª merupakan parameter untuk persamaan (2.65) dan (2.66), sehingga deret polinomial A_n dapat ditulis dalam bentuk:

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\text{ª}^n}\left[N\sum_{k=0}^{\infty}\text{ª}^k u_k\right]_{\text{ª}=0},\ n \geq 0. \tag{2.67}$$

Maka, deret polinomial Adomian A_n pada persamaan (2.67) dapat ditulis secara berurut sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(u_0) \\
A_1 &= u_1 F^{'}(u_0) \\
A_2 &= u_2 F^{'}(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} F^{''}(u_0) \\
A_3 &= u_3 F^{'}(u_0) + u_1 u_2 F^{''}(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} F^{'''}(u_0) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Selanjutnya subtitusikan persamaan (2.64) dan (2.63) ke persamaan (2.62), di peroleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = L^{-1} g + L^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n . \tag{2.69}$$

Berdasarkan persamaan (2.69) didapatkan nilai u yang sesuai sehingga dapat di tulis:

$$\begin{aligned}
u_0 &= L^{-1} g \\
u_1 &= -L^{-1} R u_0 - L^{-1} A_0 . \\
&\vdots \\
u_{n+1} &= -L^{-1} R u_n - L^{-1} A_n
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Contoh 2.7

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial nonlinier berikut:

$$y^{''} + \frac{2}{x} y^{'} + y^3 = 6 + x^6 , \tag{2.71}$$

dengan

$$y(0) = 0 ,\ y^{'}(0) = 0.$$

Persamaan (2.71) dirubah ke dalam operator diferensial, menjadi sebagai berikut:

$$Ly = 6 + x^6 - y^3 \tag{2.72}$$

dengan menerapkan operator invers pada kedua sisi persamaan (2.72) menjadi:

$$y = L^{-1}(6 + x^6) - L^{-1} y^3 \tag{2.73}$$

diperoleh

$$y = x^2 + \frac{x^8}{72} - L^{-1} y^3 \tag{2.74}$$

Metode dekomposisi Adomian di bagi $x^2 + \frac{x^8}{72}$ menjadi dua bagian kita mengunakan hampiran polinomial adomian untuk istilah nonlinier sebagai berikut:

$$y_0 = x^2 \tag{2.75}$$

dan

$$y_{k+1} = \frac{x^8}{72} - L^{-1}(A_k). \tag{2.76}$$

Kemudian dapat ditentukan urutan sebagai berikut:

$$y_0 = x^2$$

$$y_1 = \frac{x^8}{72} - \frac{1}{x}\int_0^x \int_0^x x(x^2)^3 \, dx dx = 0 \tag{2.77}$$

$$y_{k+1} = 0 \, , \; k \geq 0$$

pada persamaan (2.79), solusi eksak diberikan oleh

$$y = x^2 \tag{2.78}$$

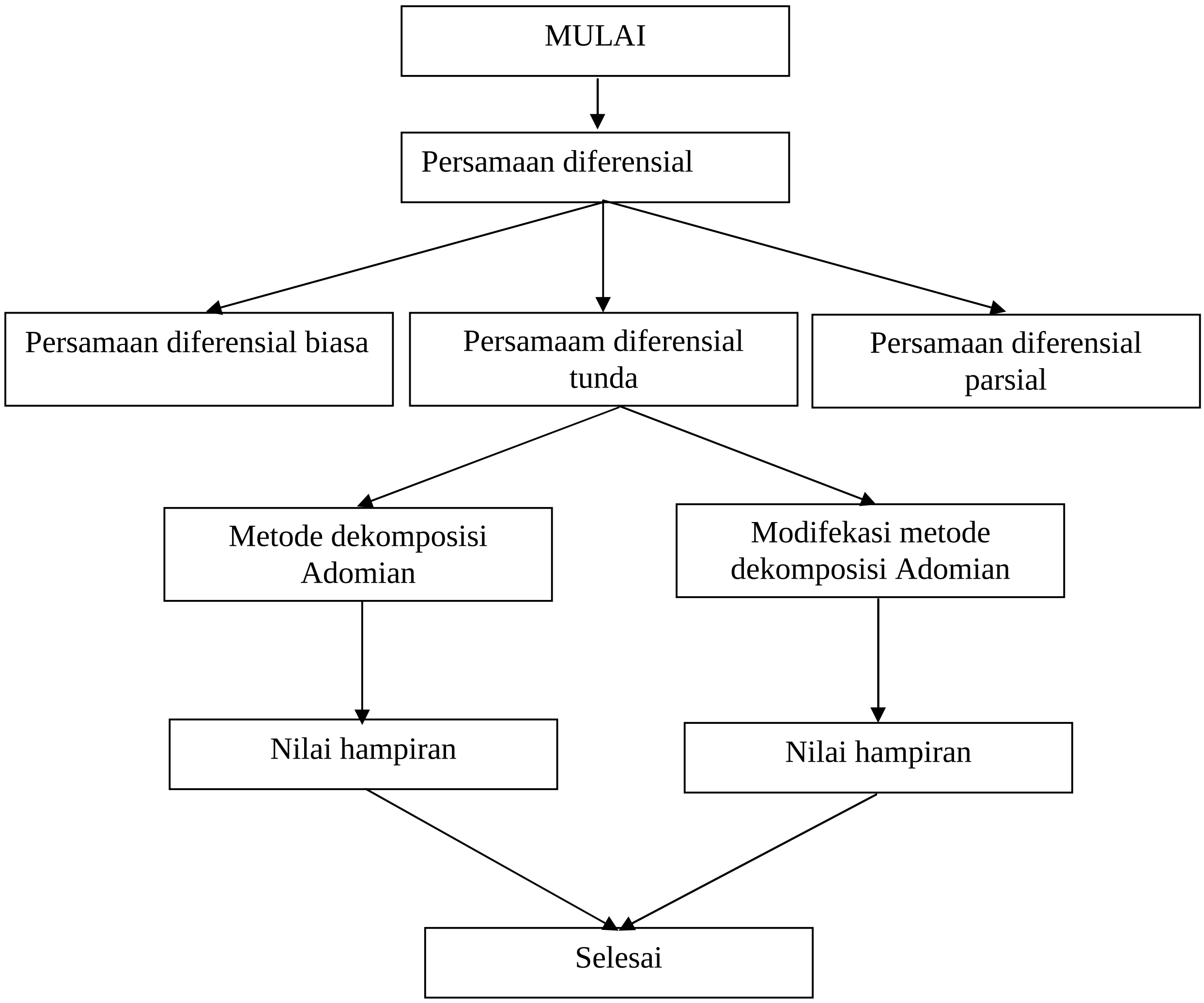
BAB III
METODOLOGI

Metode yang digunakan penulis pada tugas akhir ini adalah studi literatur, dengan langkah langkah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan diferensial tunda sebagai berikut:

   $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \quad y(g(x))), \quad 0 \le x \le 1$ dengan batas awal $y^{(i)}(0) = y,$ $i = 0, 1, n-1$ dan $y(x) = ¤(x),$
2. Mengubah persamaan diferensial tunda ke dalam deret dekomposisi Adomian.
3. Mengubah persamaan diferensial tunda ke dalam deret modifikasi dekomposisi Adomian.
4. Menyelesaikan persamaan diferensial dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian.
5. Menentukan hampiran suku-suku yang digunakan terhadap penyelesaian eksak.
6. Menggambarkan hampiran dari suku-suku yang diperoleh ke dalam grafik untuk menghampiri penyelesaian eksak.
7. Menentukan galat persamaan diferensial dengan cara melihat tabel galat yang diperoleh.

FLOW CHAT


MULAI
Persamaan diferensial
Persamaan diferensial biasa
Persamaam diferensial tunda
Persamaan diferensial parsial
Metode dekomposisi Adomian
Modifekasi metode dekomposisi Adomian
Nilai hampiran
Nilai hampiran
Selesai

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Persamaan Diferensial

Pada dasarnya modifikasi metode dekomposisi Adomian hampir sama dengan metode dekomposisi adomian biasa, modifikasi dapat dilihat pada operator diferensial dan operator invers diferensial. Perhatikan persamaan umum $Fu = g(x)$ dengan Fu dipecah menjadi persamaan diferensial linier dan nonlinier. Komponen linier dapat ditulis sebagai $Lu + Ru$ dengan L merupakan operator diferensial tertinggi dan R merupakan operator diferensial linier sedangkan Nu mewakili istilah nonlinier. Untuk itu, persamaan dapat ditulis sebagai:

$$Lu + Ru + Nu = g(x) \tag{4.1}$$

atau

$$Lu = g - Ru - Nu. \tag{4.2}$$

Oleh karena $L = x^{-1}\dfrac{d^n}{dx^n}x$ merupakan operator diferensial tertinggi dalam persamaan diferensial maka dapat diasumsikan bahwa invers operator L^{-1} ada, dan merupakan integral sebanyak orde yang ada pada L terhadap u dari 0 sampai u. Jika diambil $n = 2$, maka $L = x^{-1}\dfrac{d^2}{dx^2}x$ sehingga

$$L^{-1}(.) = x^{-1}\int_0^x\int_0^x x(.)dxdx. \tag{4.3}$$

Berdasarkan persamaan (4.2) diperoleh:

$$u = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \tag{4.4}$$

Penyelesaian u pada persamaan (4.4) dapat dinyatakan sebagai penjumlahan deret tak terhingga sebagai berikut:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \ . \tag{4.5}$$

Untuk komponen nonlinier pada persamaan (4.4) dapat diasumsikan bahwa Nu adalah deret polinomial A_n yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \ , \tag{4.6}$$

dengan A_n diperoleh dengan menuliskan:

$$\text{³}(\text{ª}) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{ª}^n u_n \ , \tag{4.7}$$

sehingga:

$$N(\text{³}(\text{ª})) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{ª}^n A_n . \tag{4.8}$$

dan ª merupakan parameter untuk persamaan (4.7) dan (4.8), sehingga deret polinomial A_n dapat ditulis dalam bentuk:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\text{ª}^n} \left[N \sum_{k=0}^{\infty} \text{ª}^k u_k \right]_{\text{ª}=0} , \ n \geq 0. \tag{4.9}$$

Maka, deret polinomial Adomian A_n pada persamaan (4.9) dapat ditulis secara berurut sebagia berikut:

$$A_0 = F(u_0)$$
$$A_1 = u_1 F^{'}(u_0)$$
$$A_2 = u_2 F^{'}(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} F^{''}(u_0)$$

$$A_3 = u_3F^{'}(u_0) + u_1u_2F^{''}(u_0) + \frac{u_1^3}{3!}F^{'''}(u_0) \qquad (4.10)$$
$$\vdots$$

Sekarang subtitusikan persamaan (4.5) dan (4.6) ke persamaan (4.4), di peroleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = L^{-1}g + L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n. \qquad (4.11)$$

Berdasarkan persamaan (4.11) didapatkan nilai u yang sesuai sehingga dapat di tulis:

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0. \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial tunda nonlinier orde satu berikut:

$$y^{'}(x) = 1 - 2y^2\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (4.13)$$

Dengan kondisi awal $y(0) = 0$ dan solusi eksak $y(x) = \sin(x)$ (Taiwo, 2010).
Penyelesaian :

Persamaan (4.13) dapat ditulis kedalam operator invers sebagai berikut:

$$Ly(x) = 1 - 2y^2\left(\frac{x}{2}\right), \text{ dengan } L = \frac{d}{dx} \qquad (4.14)$$

Penerapkan L^{-1} pada kedua ruas pada persamaan (4.14), akan diperoleh:

$$y(x) = L^{-1}(1) - 2L^{-1}\left\{y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\},$$

$$= x - 2L^{-1}\left\{ y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\} \tag{4.15}$$

Selanjutnya, persamaan (4.15) dibagi menjadi dua bagian sehingga diperoleh:

$$y_0 = x \tag{4.16}$$

dan

$$y_{n+1} = -2L^{-1}\left\{ y^2\left(\frac{x}{2}\right)\right\} \text{ untuk } n = 0,1,2,3,...,6 \tag{4.17}$$

Untuk mencari nilai y_1, terlebih dahulu ditentukan nilai A_0 dengan cara mensubtitusikan persamaan (4.16) ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh:

$$A_0 = y_0^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 \tag{4.18}$$

sehingga

$$y_1 = -2\int_0^x A_0 dx$$

$$= -2\left(x^{-1}\int_0^x x(A_0)dx\right)$$

$$= -\frac{1}{8}x^3 \tag{4.19}$$

Untuk mencari nilai y_2, terlebih dahulu ditentukan nilai A_1 dengan cara mensubtitusikan persamaan (4.16) dan (4.19) ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh:

$$A_1 = x\left(-\frac{1}{64}x^3\right)$$

$$= -\frac{1}{64}x^4 \tag{4.20}$$

sehingga

$$y_2 = -2\left(x^{-1}\int_0^x x(A_1)dx\right)$$

$$= -\frac{1}{194}x^5 \tag{4.21}$$

Untuk mencari nilai y_3, terlebih dahulu ditentukan nilai A_2 dengan cara mensubtitusikan persamaan (4.16) , (4.19) dan (4.21) ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh:

$$A_2 = \frac{1}{4096}x^6 - \frac{1}{6144}x^6$$

$$= \frac{5}{12288}x^6 \tag{4.22}$$

sehingga

$$y_3 = -2\left(x^{-1}\int_0^x x(A_2)dx\right)$$

$$= -\frac{5}{49152}x^7 \tag{4.23}$$

Untuk mencari nilai y_4, terlebih dahulu ditentukan nilai A_3 dengan cara mensubtitusikan persamaan (4.16) , (4.19) , (4.21) dan (4.23) ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh:

$$A_3 = -\frac{1}{196608}x^8 + \frac{1}{196608}x^8$$

$$= -\frac{37}{6291456}x^8 \qquad (4.24)$$

sehingga

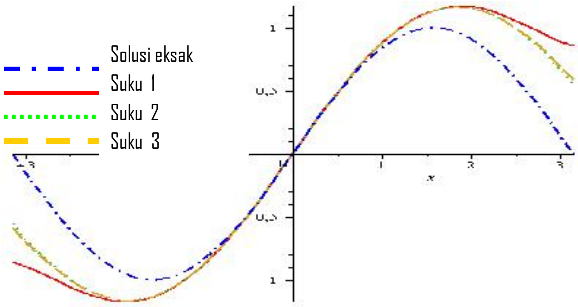
$$y_4 = -2\left(x^{-1}\int_0^x x(A_3)dx\right)$$

$$= \frac{37}{31457280}x^9 \qquad (4.25)$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.13) bergantung pada banyaknya suku-suku yang dicari.

$$\begin{aligned} y_0(x) &= x \\ y_2(x) &= x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{192}x^5 \\ y_4(x) &= x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{192}x^5 - \frac{5}{49152}x^7 + \frac{37}{31457280}x^9 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (4.26)$$

Gambar (4.1) merupakan hampiran suku-suku pada persamaan (4.26) terhadap penyelasaian eksak pada interval $-® \le x \le ®$.

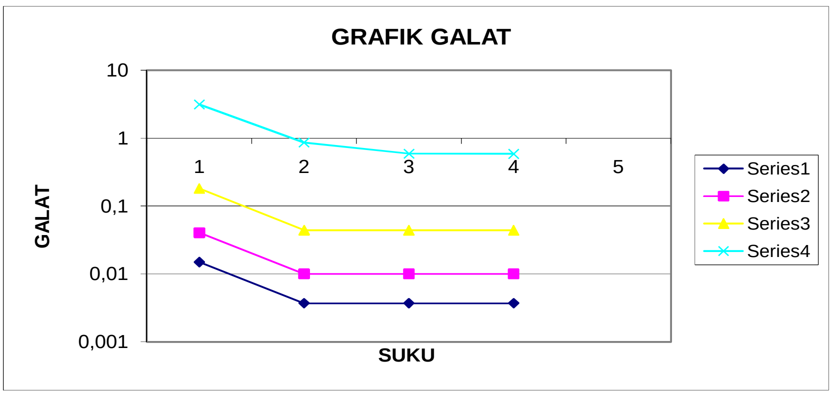


Pada gambar di atas terlihat bahwa semakin benyak suku yang digunakan untuk menghampiri nilai eksak maka galat yang diperoleh akan semakin kecil, dari ketiga suku yang digunakan, suku ke tiga adalah suku yang paling mendekati nilai eksak persamaan diferensial tunda.

Tabel 4.1 Galat contoh (4.1) Untuk Beberapa Jumblah Suku yang digunakan pada Interval $\frac{®}{7} \leq x \leq ®$.

x	E_1	E_3	E_6	E_7
®/7	0.0149152114	0.0037103806	0.0037100084	0.0037100084
®/6	0.0235987758	0.0058602993	0.0058592053	0.0058592053
®/5	0.0405332784	0.0100370345	0.0100331198	0.0100331197
®/4	0.0782913825	0.0192887449	0.0192701262	0.0192701256
®/3	0.1811721470	0.0441836336	0.0440449302	0.0440449154
®	3.141592654	0.859660594	0.5874818913	0.5848525172

Berdasarkan Tabel (4.1) dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentik oleh suku ke tujuh lebih mendekati dibandingkan dengan kurva-kurva yang lainnya. Hal ini menunjukan semakin banyak iterasi yang digunakan akan mendekati kurva eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *galat* yang duhasilkan oleh beberapa suku dari tabel diatas dapat dilihat pada gambar 4.2 berikut:



Gambar 4.2 menunjukkan kecepatan metode dekomposisi Adomian menghampiri nilai eksak persamaan diferensial tunda pada persamaan (4.13) dengan $y(x) = \sin x$ pada interval $\frac{\text{®}}{7} \leq x \leq \text{®}$ untuk beberapa jumlah suku.

Contoh 4.2

Tentukan penyelesaiaan persamaan diferensil tunda linier orde dua sebagai berikut:

$$y^{''}(x) = \frac{3}{4} y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) - x^2 + 2 \tag{4.27}$$

dengan kondisi awal $y(0) = 0$ dan $y^{'}(0) = 0$ serta solusi eksak $y(x) = x^2$ (O.A.Taiwo, 2010).

Penyelesaian :

Persamaan (4.27) dapat ditulis kedalam operator invers sebagai berikut:

$$L^{-1} y(x) = \left(\frac{3}{4} y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \left(-x^2 + 2\right), \text{ dengan } L = \frac{d^2}{dx^2} \tag{4.28}$$

Penerapan L^{-1} pada kedua ruas untuk persamaan (4.29), akan diperoleh:

$$y(x) = L^{-1}\left(\frac{3}{4} y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right)\right) + L^{-1}\left(-x^2 + 2\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{12} + L^{-1}\left(\frac{3}{4} y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{4.29}$$

Persamaan (4.30) dibagi kedalam dua bagian sehingga diperoleh:

$$y_0 = x^2 - \frac{x^4}{12} \tag{4.30}$$

dan

$$y_{n+1} = L^{-1}\left(\frac{3}{4}y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right)\right)dxdx \tag{4.31}$$

Untuk mencari nilai y_1 subtitusikan persamaan (4.30) ke dalam persamaan (4.31) sebagai berikut:

$$y_1 = x^{-1}\int_0^x\int_0^x x\left(x^2 - \frac{13}{192}x^4\right)dxdx$$

$$= \frac{1}{20}x^4 - \frac{13}{8064}x^6 \tag{4.32}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai y_2 subtitusikan persamaan (4.32) ke dalam persamaan (4.3) sebagai berikut:

$$y_2 = x^{-1}\int_0^x\int_0^x x\left(\frac{13}{320}x^4 - \frac{91}{73728}x^6\right)dxdx$$

$$= \frac{13}{13440}x^6 - \frac{91}{5308416}x^{10} \tag{4.33}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai y_3 subtitusikan persamaan (4.33) ke dalam persamaan (4.3) sebagai berikut:

$$y_3 = x^{-1}\int_0^x\int_0^x x\left(\frac{91}{122880}x^6 - \frac{17563}{1358954496}x^8\right)dxdx$$
$$= \frac{91}{8847360}x^8 - \frac{17563}{149484994560}x^{10} \tag{4.34}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai y_4 subtitusikan persamaan (4.34) ke dalam persamaan (4.3) sebagai berikut:

$$y_4 = x^{-1}\int_0^x\int_0^x x\left(\frac{17563}{2264924160}x^8 - \frac{13505947}{153072634429440}x^{10}\right)dxdx$$

$$= \frac{17563}{249141657600}x^{10} - \frac{1038919}{1836871613153280}x^{12} \tag{4.35}$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.27) bergantung pada suku-suku yang dicari:

$$y_0(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^4$$

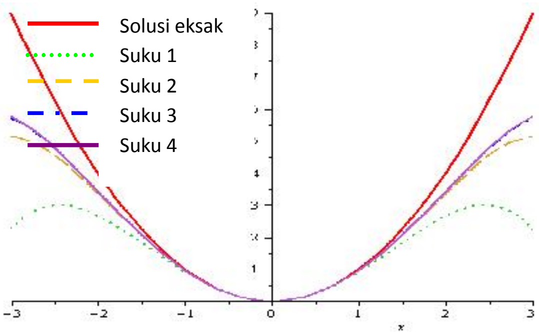
$$y_2(x) = x^2 - \frac{1}{30}x^4 - \frac{13}{20160}x^6\frac{91}{5308416}x^8$$

$$y_4(x) = x^2 - \frac{1}{30}x^4 - \frac{13}{20160}x^6 - \frac{91}{13271040}x^8 - \frac{17563}{373712486400}x^{10}$$

$$- \frac{1038919}{1836871613153280}x^{12} \tag{4.36}$$

$$\vdots$$

Gambar (4.3) merupakan hampiran suku-suku pada persamaan (4.36) terhadap penyelesaian eksak pada interval $x = -3...3$

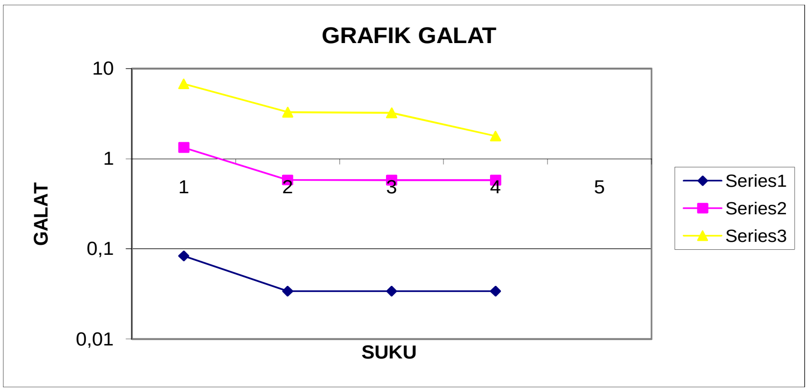


Pada gambar diatas terlihat bahwa semakin benyak suku yang digunakan untuk menghampiri nilai eksak maka galat yang diperoleh akan semakin kecil, dari ketiga suku yang digunakan, suku ke empat adalah suku yang paling mendekati nilai eksak persamaan diferensial tunda.

Tabal 4.2 Galat Contoh (4.2) untuk Beberapa Jumlah Suku yang Digunakan pada Interval $-3 \le x \le 3$.

x	E_1	E_3	E_5	E_7
-9	6.750000000	3.282561820	3.222015970	3.217983263
-4	1.333333333	0.578991678	0.576478886	0.576407660
-1	0.0833333333	0.0339953172	0.0339851491	0.0339850789
1	0.0833333333	0.0339953172	0.0339851491	0.0339850789
4	1.333333333	0.578991678	0.576478886	0.576407660
9	6.750000000	3.282561820	3.222015970	1.782016737

Berdasarkan Tabel (4.2) dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentik oleh suku ke tujuh lebih mendekati dibandingkan dengan kurva-kurva yang lainnya. Hal ini menunjukan semakin banyak iterasi yang digunakan akan mendekati kurva eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *galat* yang duhasilkan oleh beberapa suku dari tabel diatas dapat dilihat pada gambar 4.4 berikut:



Gambar 4.2 menunjukkan kecepatan metode dekomposisi Adomian menghampiri nilai eksak persamaan diferensial tunda pada persamaan (4.27) dengan $y(x) = x^2$ pada interval $-9 \le x \le 9$ untuk beberapa jumlah suku.

Contoh 4.3

Tentukan penyelesaiaan persamaan diferensil tunda nonlinier orde tiga berikut:

$$y'''(x) = -1 + 2y^2\left(\frac{x}{2}\right) \tag{4.37}$$

Dengan kondisi awal $y(0)=0,\ y^{'}(0)=1$ dan $y^{''}(0)=0$ serta solusi eksak $y(x)=\sin(x)$ (O.A.Taiwo, 2010).

Penyelesaian :

Persamaan (4.37) dapat ditulis kedalam operator invers sebagai berikut:

$$L^{-1}y(x)=(-1)+2\left(y^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\right), \text{ dengan } L=\frac{d^{3}}{dx^{3}} \tag{4.38}$$

Penerapan L^{-1} pada kedua ruas untuk persamaan (4.38), akan diperoleh diperoleh:

$$y(x)=L^{-1}(-1)+2L^{-1}\left(y^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$=x-\frac{x^{3}}{6}+2L^{-1}\left(y^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{4.39}$$

Persamaan (4.39) dapat dibagi kedalam dua bagian sehingga di peroleh

$$y_{0}(x)=x-\frac{x^{3}}{6} \tag{4.40}$$

dan

$$y_{n+1}=2L^{-1}\left\{y^{2}\left(\frac{x}{2}\right)\right\} \quad n=0,1,2,...,n \tag{4.41}$$

Untuk mencari nilai y_1, terlebih dahulu ditentukan nilai A_0 dengan cara mensubtitusikan persamaan (4.40) ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh:

$$A_{0}=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{48}x^{3}\right)^{2}$$

$$=\frac{1}{4}x^{2}-\frac{1}{48}x^{4}+\frac{1}{2304}x^{6} \tag{4.42}$$

sehingga

$$y_1 = 2\left(x^{-1} \int_0^x \int_0^x \int_0^x x(A_0) \right) dxdxdx$$

$$= \frac{1}{240} x^5 - \frac{1}{8064} x^7 + \frac{1}{829440} x^9 \qquad (4.43)$$

Untuk mencari nilai y_2, terlebih dahulu ditentukan nilai A_1 dengan cara mensubtitusikan persamaan (4.40) dan (4.43) ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh:

$$A_1 = \left(x - \frac{1}{24} x^3 \right)\left(\frac{1}{7680} x^5 - \frac{1}{1032192} x^7 + \frac{1}{424673280} x^9 \right)$$

$$= \frac{1}{7680} x^6 - \frac{11}{1720320} x^8 + \frac{127}{2972712960} x^{10} - \frac{1}{10192158720} x^{12} \qquad (4.44)$$

sehingga

$$y_2 = 2\left(x^{-1} \int_0^x \int_0^x \int_0^x x(A_1) \right) dxdxdx$$

$$= \frac{1}{2764800} x^9 - \frac{1}{103219200} x^{11}$$

$$+ \frac{127}{3246202552320} x^{13} - \frac{1}{17122826649600} x^{15} \qquad (4.45)$$

Untuk mencari nilai y_3, terlebih dahulu ditentukan nilai A_2 dengan cara mensubtitusikan persamaan (4.40), (4.43) dan (4.45) ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh:

$$A_2 = \left(\frac{1}{58982400} x^{10} - \frac{1}{3963617280} x^{12} + \frac{31}{19976631091200} x^{14} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{219172181114880} x^{16} + \frac{1}{180347394745958400} x^{18} \right) \left(x - \frac{1}{24} x^3 \right)$$
$$\left(\frac{1}{1415577600} x^9 - \frac{1}{211392921600} x^{11} + \frac{1}{26592891308605440} x^{13} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{561080783654092800} x^{15} \right)$$
$$= \frac{1}{56623104} x^{10} - \frac{109}{380507258880} x^{12} + \frac{233179}{132964456543027200} x^{14}$$
$$- \frac{243211}{5105835131252244 4800} x^{16} + \frac{227}{403978164230946816 00} x^{18} \qquad (4.46)$$

sehingga

$$y_3 = 2\left(x^{-1} \int_0^x \int_0^x \int_0^x x(A_2)\, dx dx dx \right)$$

$$= \frac{1}{61832429568} x^{13} - \frac{109}{639252194918400} x^{15}$$

$$+ \frac{233179}{325496989617330585600} x^{17} + \frac{243211}{174619561488826761216000} x^{19} \qquad (4.47)$$
$$- \frac{227}{186637911874697428992000} x^{21}$$

Untuk mencari nilai y_4, terlebih dahulu ditentukan nilai A_3 dengan cara mensubtitusikan persamaan (4.40), (4.43), (4.45) dan (4.47) ke dalam persamaan (4.10) sehingga diperoleh:

$$A_3 = \left(\frac{1}{3840} x^5 - \frac{1}{516096} x^7 + \frac{1}{212336640} x^9 \right) \left(\frac{1}{1415577600} x^9 \right.$$
$$+ \frac{1}{211392921600} x^{11} - \frac{127}{26592891308605440} x^{13}$$
$$\left. + \frac{1}{561080783654092800} x^{15} \right) + \left(x - \frac{1}{24} x^3 \right) \left(\frac{1}{506531263021056} x^{13} \right.$$

$$- \frac{243211}{915509406538540049844142080000} x^{19}$$

$$\left. + \frac{227}{391408070163845462605430784000} x^{21} \right)$$

$$= \frac{11773}{633164078776320000} x^{14} - \frac{3660077}{1361556035000598528000} x^{16}$$

$$+ \frac{2977670599}{213317707115613772578816000} x^{18}$$

$$- \frac{351093468493}{1089456193780862659314529075200 0} x^{20}$$

$$+ \frac{2519024873}{966777933304698292635414036480000} x^{22}$$

$$- \frac{3163}{37575174735729164410121355264 0} x^{24} \qquad (4.48)$$

sehingga

$$y_4 = 2\left(x^{-1} \int_0^x \int_0^x \int_0^x x\left(A_3\right) \right) dxdxdx$$

$$= \frac{11773}{15499856648444313600 0} x^{17} - \frac{3660077}{465652163970204696576000 0} x^{19}$$

$$+ \frac{2977670599}{985527806874135629314129920000} x^{21}$$

$$- \frac{351093468493}{6615178008637398067357820544614400 0} x^{23}$$

$$+ \frac{2519024873}{754086787977664668255622948454400000} x^{25}$$

$$- \frac{3163}{369288817302746227822672679534592 0} \qquad (4.49)$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.38) bergantung pada banyaknya jumlah suku yang dicari:

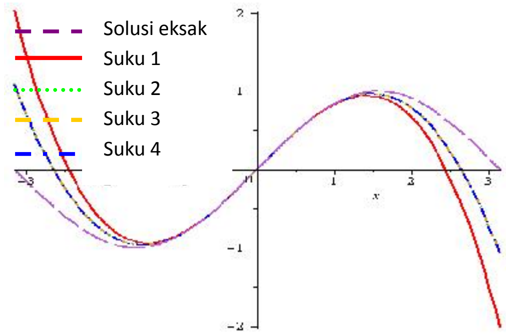
$$y_0(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{240}x^5 - \frac{1}{8064}x^7 + \frac{13}{8294400}x^9 - \frac{1}{103219200}x^{11} + \frac{127}{3246202552320}x^{13} + \frac{1}{17122826649600}x^{15}$$

$$\begin{aligned} y_4(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{30}x^4 + \frac{1}{240}x^5 - \frac{1}{8064}x^7 + \frac{13}{8294400}x^9 \\ - \frac{1}{103219200}x^{11} + \frac{359}{6492405104640}x^{13} - \\ \frac{439}{1917756584755200}x^{15} + \frac{2579023}{325496989617330585600 0}x^{17} - \\ \frac{30437111}{1396956491910614089728 0000}x^{19} + \\ \frac{12528982357}{29565834206224068879423 89760000}x^{21} + \\ \frac{351093468493}{66151780086373980673578205446144000}x^{23} - \\ \frac{2519024873}{754086787977664668255622948454400000}x^{25} + \\ \frac{3163}{3692888173027462278226726795345920}x^{27} \end{aligned} \tag{4.50}$$

$\vdots$

Gambar (4.5) merupakan hampiran suku-suku pada persamaan (4.50) terhadap penyelesaian eksak pada interval $-® \leq x \leq ®$

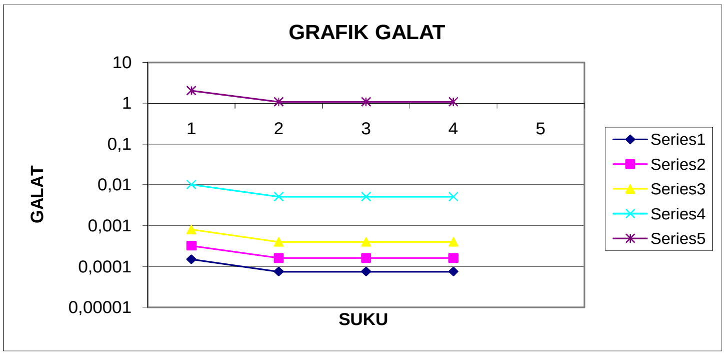


Pada gambar di atas terlihat bahwa semakin benyak suku yang digunakan untuk menghampiri nilai eksak maka galat yang diperoleh akan semakin kecil, dari ketiga suku yang digunakan, suku ke empat adalah suku yang paling mendekati nilai eksak persamaan diferensial tunda.

Tabal 4.3 Galat Contoh (4.3) untuk Beberapa Jumlah Suku yang Digunakan pada Interval $\frac{®}{7} \le x \le ®$.

x	E_1	E_3	E_5	E_7
®/7	0.0001510066	0.0000755941	0.0000755941	0.0000755941
®/6	0.0003258204	0.0001631771	0.0001631771	0.0001631771
®/5	0.0008084238	0.0004051679	0.0004051679	0.0004051679
®/4	0.0024541297	0.0012316150	0.0012316150	0.0012316150
®/3	0.0102246227	0.0051462716	0.0051462716	0.0051462716
®	2.026120129	1.081596324	1.081554051	1.081554032

Berdasarkan Tabal (4.3) dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentik oleh suku ke tujuh lebih mendekati dibandingkan dengan kurva-kurva yang lainnya. Hal ini menunjukan semakin banyak iterasi yang digunakan akan mendekati kurva eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *galat* yang duhasilkan oleh beberapa suku dari tabel diatas dapat dilihat pada gambar 4.6 berikut:



Gambar 4.6 menunjukkan kecepatan metode dekomposisi Adomian menghampiri nilai eksak persamaan diferensial tunda pada persamaan (4.37) dengan $y(x) = \sin x$ pada interval $\frac{®}{7} \leq x \leq ®$ untuk beberapa jumlah suku.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari Tugas Akhir ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

a) Modifikasi metode dekomposisi Adomian dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier dengan bentuk umum persamaan $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \;\; y(g(x))),$ berdasarkan masalah nilai awal $y_0(0) = 0$ dengan $n = 1$dan 3.

b) Hasil yang diperoleh dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi adomian, semakin mendekati nilai eksak yang dapat dilihat pada contoh kasus 4.1, contoh kasus 4.2 dan contoh kasus 4.3 persamaan diferensial tunda.

c) Semakin banyak iterasi yang digunakan maka hasil yang diperoleh akan semakin akurat dan galat yang dihasilkan akan semakin kecil.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial tunda dengan persamaan $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \;\; y(g(x))),$ baik yang linier maupun nonlinier berdasarkan nilai awal $y(0) = 0$ dan $n = 1, 2$,dan 3 dengan menggunakan modifikasi metode dekomposisi Adomian. Bagi pembaca yang berminat untuk melanjutkan Tugas Akhir ini, penulis sarankan membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial tunda menggunakan metode lain.

DAFTAR PUSTAKA

B. Mishra P.Das, C. R. Dash, Ocilation Theorems for Natural Delay Differential Equation of Odd Order. *Institute Mathematics,* Volume 1, No 4, 557-568, 2006.

Evans. And Raslan, The Adomian Decomposition Method For Solving Delay Differensial Equation, *International Journal Of Computer Mathematics*, Volume 0 No 0, 1-6, 2004.

G. Adomian, A Review of The Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equation, *Math. Comput. Modelling*, Volume 13 No. 7, 17-43, 1990.

G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics the Decomposition Method. *General Analytic Corporation*, Athens, Georgia U.S.A. 1993

G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics The Decomposition Method, Kluwer, *Boston, MA*, 1994.

Hasan Yahya Qaid, Liu Ming Zhu, Modified Adomian Decomposition Method for Singular Initial Value Problems in The Second-Order Ordinary Differential Equations, *Surveys in Mathematics and its Approximations,* Volume 3, 183-193, 2008.

Ibrahim. M. A. K, All, 2h-Splline Method for The Solusian of Delay Differential Equation. *Computers Math. Aplic*. Volume 29, no 8, 1-6, 1995.

Ismail Fudziah, All, Numerical Treatment of Delay DifferentialEquations by Runge-Kutta Method Using Hermite Interpolation, *Journal Of Mathematic*, Volume 18 No 2, 79-90, 2002.

Kaya. D, 1998, A New Approach to Solve a Nonlinier Wave Equation, *Bull Malaysia Math. Soc, Vol.21 no. 2, 95-100.*

Kaya.D et al, 1999, On The Solutions of The Nonlinier Wave Equation by The Decompotition Method, *Bull Malaysia Math. Soc. Vol.* 2 *no. 22, 151-155*.

Mustafa Inc, 2004, On Numerical Solutions of Partial Differential Equations By Decompotition Method, *Kragujevac J. Math, **26**: 153-164*.

Natsir. M, Analisis Ketunggalan Solusi Periodik Persamaan Diferensial Tunda, *Jurnal Natur Indonesia*, Volume 5, No 1, 76-83, 2002.

Olga and Smarda Adomian Decomposition Method for Certain Singular Initial Value Problems, *Journal of Applied Mathematics*, Volume 3, No 2, 91-98, 2010.

Stavroulakis, Ioannis P, Stepean A Tersian, *Partial Differtial Equations*.

Taiwo and Odetunde, On the Numerikal Approximation of Delay Defferential Equation by a Decomposition Method, *Asian Journal of Mathematics and Statistics*, Volume 3 No. 4, 237-243, 2010.

Wartono, kamairoh bakri, 2010, Penyelesaian Persamaan Diferensial Parabolik Nonlinier dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian, *jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol 8 no.1, 1-57.*